

Über eine den Maxwell-Gleichungen analoge Darstellung der Einstein'schen Feldgleichungen der Gravitation und ihre Anwendung

Von H. DEHNEN *

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg
(Z. Naturforschg. 17 a, 18—30 [1962]; eingegangen am 6. Juli 1961)

Es wird gezeigt, daß sich die EINSTEINSchen Feldgleichungen des metrischen Feldes für die Komponenten $g_{4\mu}$ unter Auszeichnung der Zeitkoordinate in eine Form bringen lassen, welche den MAXWELL-Gleichungen weitgehend analog ist. Die den MAXWELLSchen Feldintensitäten \mathcal{E} und \mathcal{B} analogen Feldgrößen beschreiben das NEWTONsche Gravitationsfeld und das durch die Strömung der Materie erzeugte CORIOLIS- und Zentrifugalfeld. Insbesondere gilt der Satz, daß in einer räumlich geschlossenen Welt das CORIOLIS- und Zentrifugalfeld ausschließlich durch die Impulsdichte der Materie (und des Gravitationsfeldes) erzeugt wird, wie es das MACHsche Prinzip erwarten läßt. Als Anwendung unserer Untersuchung wird die langsam rotierende Flüssigkeitskugel behandelt.

Es ist neuerdings gezeigt worden, daß in den *stationären* Räumen der allgemeinen Relativitätstheorie (in denen die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ unabhängig von der Zeit sind) das auftretende CORIOLIS-Feld eine weitgehende Analogie mit einem stationären Magnetfeld aufweist¹⁻³. Die CORIOLIS-Kraft hat die Gestalt einer LORENTZ-Kraft und das CORIOLIS-Feld selbst gehorcht denselben Gesetzen wie ein Magnetfeld (\mathcal{B} -Feld) in der Elektrodynamik; d. h. es läßt sich aus einem Vektorpotential durch Rotationsbildung ableiten und es existiert ferner ein Analogon zum BIOT-SAVARTSchen Gesetz. Andererseits ist die Analogie zwischen statischem Gravitationsfeld und statischem elektrischen Feld längst bekannt.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, diese Analogien auf *nicht-stationäre* Räume auszudehnen, in denen die $g_{\mu\nu}$ von der Zeit t abhängen. Dem entspricht in der Elektrodynamik der Übergang von statischen und stationären Feldern zu *nicht-stationären* Feldern, d. h. der Übergang vom COULOMBSchen und BIOT-SAVARTSchen Gesetz zu den MAXWELL-Gleichungen. Diesen Analogien entsprechend ist zu erwarten, daß neben dem \mathcal{B} -Feld zur Beschreibung des CORIOLIS-Feldes allgemein auch ein \mathcal{E} -Feld im Sinne der MAXWELL-Gleichungen auftritt, und es ist zu fragen, welche Bedeutung diesem im Einzelfall zukommt. Ferner ist zu vermuten, daß auch den den Quantitätsgrößen des elektromagnetischen Feldes \mathfrak{h} und \mathfrak{d} (MIE) entsprechenden Feldgrößen in der

Gravitationstheorie eine Bedeutung zufällt und daß die Verknüpfung dieser Größen untereinander und mit der Strömung der Materie (entsprechend der elektrischen Stromdichte) dem System der MAXWELL-Gleichungen analog ist.

Unsere Absicht ist demnach, von der gewöhnlichen tensoriellen Gravitationstheorie eine vektorielle Theorie in Analogie zur MAXWELLSchen Elektrodynamik abzutrennen. Dazu spalten wir die vierdimensionale Welt von vornherein in Raum und Zeit auf und lassen keine Transformationen mehr zu, die Raum und Zeit ineinander überführen würden. Die drei Raumkoordinaten x^i sollen sich also nur noch unter sich transformieren⁴: $x^i = x^i(\bar{x}^j)$. Ferner möge die Zeit $t = x^4/c$ keiner Transformation mehr unterworfen werden⁵ ($x^4 = \bar{x}^4$). Daraufhin fassen wir die vier verschiedenen zeitlichen (kovarianten) Komponenten $\tau_{4\mu}$ der üblichen Tensoren 2. Stufe zu „vektoriellen“ Gebilden zusammen. Diese Größen zerfallen bei der getroffenen Einschränkung der möglichen Koordinatentransformationen in einen räumlichen Dreivektor und einen Skalar. Wir werden es jedoch meistens bequem finden, an der Viererschreibweise äußerlich festzuhalten.

Die allein zugelassenen Transformationen der drei Raumkoordinaten unter sich bilden demnach eine sehr beschränkte Gruppe; selbst LORENTZ-Transformationen sind nicht zulässig. Wir haben vielmehr ähnliche Verhältnisse wie in der *vor-relativistischen*

* Dissertationsauszug, Freiburg 1961.

¹ F. HUND, Z. Phys. **124**, 272 [1948].

² H. HÖNL u. A. MAUE, Z. Phys. **144**, 160 [1956].

³ CH. SOERGEL-FABRICIUS, Z. Phys. **161**, 392 [1961].

⁴ Griechische Indizes laufen im folgenden von 1 bis 4, lateinische von 1 bis 3.

⁵ Eigentlich sind für die Zeit sogenannte Eichtransformationen $x^4 = \bar{x}^4 + h(\bar{x}^i)$ zugelassen.



Elektrodynamik bei Zugrundelegung von Koordinatensystemen, die gegeneinander *keine* Bewegung aufweisen (und für die daher auch $x^4 = \bar{x}^4$ ist). Entsprechend der älteren Elektrodynamik, in welche die LORENTZ-Transformationen noch nicht einbezogen waren, ist der Zweck unserer Darstellung, die *Übersicht* über die wesentlichen Probleme der Gravitation zu erleichtern.

1. Bewegungsgleichungen und Definition der Feldintensitäten

Wir legen den folgenden Überlegungen das Linienelement der metrischen Gravitationstheorie zugrunde, das wir unter Aufspaltung in Raum und Zeit folgendermaßen schreiben⁶:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\sigma^2 + d\tau^2, \\ -d\sigma^2 &= \gamma_{mn} dx^m dx^n, \quad \gamma_{mn} = g_{mn} - \frac{g_{4m} g_{4n}}{g_{44}}, \\ d\tau^2 &= \varepsilon_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{g_{4\mu} g_{4\nu}}{g_{44}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Zunächst untersuchen wir die Bewegungsgleichung eines Probekörpers gemäß dieser Metrik, wobei sich der LAGRANGESCHE Formalismus als besonders geeignet erweist. Dabei heben wir unter den auftretenden Kräften diejenigen hervor, die ersichtlich eine Analogie zur Elektrodynamik aufweisen; demgemäß soll die Definition der Feldgrößen \mathfrak{E} und \mathfrak{B} festgesetzt werden.

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem Variationsprinzip (für die „kräftefreie“ Trägheitsbewegung)

$$\delta \int ds = 0. \quad (2)$$

Sie lauten also, wenn wir die Zeit t als Parameter benutzen (EULER-LAGRANGESCHE Diff.-Gln.),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{\partial L}{\partial x^k} \quad (3)$$

$$\text{mit} \quad L = ds/dt = \sqrt{\gamma_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n + \varepsilon_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (4)$$

Die Ableitungen dieser LAGRANGE-Funktion sind⁷:

$$\begin{aligned} \partial L / \partial x^k &= (1/2L) \{ \gamma_{mn|k} \dot{x}^m \dot{x}^n + \varepsilon_{\mu\nu|k} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \}, \\ \partial L / \partial \dot{x}^k &= (1/L) \{ \gamma_{kn} \dot{x}^n + \varepsilon_{kv} \dot{x}^\nu \}. \end{aligned} \quad (4a)$$

Damit wird (3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 c}{L} (\gamma_{kn} \dot{x}^n + \varepsilon_{kv} \dot{x}^\nu) \right\} \\ = \left(\frac{m_0 c}{2L} \right) \{ \gamma_{mn|k} \dot{x}^m \dot{x}^n + \varepsilon_{\mu\nu|k} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \}. \end{aligned} \quad (3a)$$

Man erhält hieraus die Bewegungsgleichung in der üblichen Gestalt, wenn man einerseits den ersten Term der rechten Seite auf die linke bringt, andererseits den zweiten Term der linken Seite auf die rechte herübernimmt und dort die totale Ableitung nach der Zeit ausführt. Hierdurch ergibt sich⁸:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left\{ -\frac{m_0 c}{L} \gamma_{kn} \dot{x}^n \right\} &= \left(\frac{m_0 c}{L} \varepsilon_{kv} \right)_\mu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &+ \frac{m_0 c}{L} \varepsilon_{kv} \ddot{x}^\nu - \frac{m_0 c}{L} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu|k} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right). \end{aligned} \quad (3b)$$

Links steht die zeitliche Änderung des Impulses, rechts stehen die Kräfte, die den Probekörper von der geodätischen Bewegung im dreidimensionalen Raum ablenken.

Wir wollen uns nun auf schwache Kraftfelder beschränken, d. h. in der Bewegungsgleichung (3b) die in g_{4i} quadratischen Glieder vernachlässigen. Dann erhalten wir⁹:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left\{ -\frac{m_0 c}{L} \gamma_{kn} \dot{x}^n \right\} &= c g_{4k} \left(\frac{m_0 c}{L} \right)_\mu \dot{x}^\mu \\ &- \left(\frac{m_0 c}{L} \right) \{ c (g_{4i|k} - g_{4k|i}) \dot{x}^i + c^2 \left(\frac{1}{2} g_{44|k} - g_{4k|4} \right) \}. \end{aligned} \quad (3c)$$

Diese Bewegungsgleichung vergleichen wir jetzt mit derjenigen, der ein elektrisch geladener Probekörper der spezifischen Ladung $-e/m_0$ in einem elektromagnetischen Feld nach der speziellen Relativitätstheorie gehorcht. Sie ergibt sich aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int \left(m_0 c + \frac{e}{c} \Phi_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \right) d\bar{s} = 0, \quad (2')$$

Zeit bezüglich des dreidimensionalen RIEMANNschen Raumes. Sie läßt sich, angewandt auf einen räumlichen Dreiervektor a , schreiben: $D a / D t = a_{;m} \dot{x}^m + a_{|t}$, wobei mit $;$ die partielle kovariante Ableitung nach x^m bezüglich des dreidimensionalen RIEMANNschen Raumes gemeint ist. — Die Vorzeichen sind in Gl. (3b) so gewählt, daß die Klammer auf der linken Seite einen *positiven* Impuls darstellt [vgl. Gl. (1)].

⁹ Im Falle starker Kraftfelder treten zusätzlich noch Kräfte auf, die von der Beschleunigung und vom Quadrat der Geschwindigkeit des Probekörpers abhängen und zu welchen es in der Elektrodynamik *kein* Analogon gibt.

⁶ Wir benutzen die EINSTEINSche Summenregel. Die Vorzeichen sollen so gewählt sein, daß ds/dt reell ist. Wegen der Aufspaltung in Raum und Zeit s. z. B. C. MÖLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford 1960, S. 237 ff.

⁷ Die gewöhnlichen partiellen Ableitungen nach den Koordinaten werden im folgenden durch einen entsprechenden Index mit vorgesetztem Strich gekennzeichnet. Ein Index mit vorgesetztem Doppelstrich bedeutet die *kovariante* (partielle) Ableitung nach der entsprechenden Koordinate bezüglich des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums.

⁸ D/Dt bedeutet die *totale kovariante* Ableitung nach der

wobei Φ_μ die Komponenten des Vierervektors $(\mathfrak{U}_i, \varphi)$ zusammenfaßt¹⁰. Die Bewegungsgleichung selbst soll wieder in der Gestalt der EULER-LAGRANGESchen Diff.-Gln. (3) angesetzt werden. Lassen wir wie bisher beliebige krummlinige (nicht-orthogonale) Raumkoordinaten zu, so haben wir (statt des üblichen pseudoeuklidischen Linienelements der speziellen Relativitätstheorie)

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{mn} dx^m dx^n + (dx^4)^2, \quad (1')$$

und die zu (2') gehörende LAGRANGE-Funktion \bar{L} lautet bei der Wahl von t als Parameter [entsprechend Gl. (4)]:

$$L = m_0 c \sqrt{\bar{g}_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n + c^2} + (e/c) \Phi_\mu \dot{x}^\mu. \quad (4')$$

Ihre Ableitungen sind, vgl. (4 a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{1}{2} \frac{m_0 c}{d\bar{s}/dt} \bar{g}_{mn|k} \dot{x}^m \dot{x}^n + \frac{e}{c} \mathfrak{U}_{i|k} \dot{x}^i + e \varphi_{|k}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} &= \frac{m_0 c}{d\bar{s}/dt} \bar{g}_{kn} \dot{x}^n + \frac{e}{c} \mathfrak{U}_k. \end{aligned} \quad (4 a')$$

Damit werden die EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m_0 c}{d\bar{s}/dt} \bar{g}_{kn} \dot{x}^n + \frac{e}{c} \mathfrak{U}_k \right\} \\ = \frac{1}{2} \frac{m_0 c}{d\bar{s}/dt} \bar{g}_{mn|k} \dot{x}^m \dot{x}^n + \frac{e}{c} \mathfrak{U}_{i|k} \dot{x}^i + e \varphi_{|k}. \end{aligned} \quad (3 a')$$

Man gelangt von hier zu der üblichen Darstellung der LORENTZ-Kraft, indem man genau so verfährt wie beim Übergang von (3 a) nach (3 b). Es ergibt sich entsprechend:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left\{ - \frac{m_0 c}{d\bar{s}/dt} \bar{g}_{kn} \dot{x}^n \right\} \\ = -e \left\{ (\mathfrak{U}_{i|k} - \mathfrak{U}_{k|i}) \frac{\dot{x}^i}{c} + (\varphi_{|k} - \mathfrak{U}_{k|4}) \right\}. \end{aligned} \quad (3 b')$$

Der Vergleich von (3 c) und (3 b') legt unmittelbar nahe, die Komponenten $g_{4\mu}$ des metrischen Feldes zu einem Viererpotential Φ_μ analog dem der Elektrodynamik zusammenzufassen. Welche Bedeutung den zugehörigen Feldern dann zufällt, soll jetzt untersucht werden.

¹⁰ Um die Analogie zur Gravitationstheorie nicht unnötig mit Vorzeichenfragen zu belasten, haben wir die Ladung des Probekörpers als negativ angenommen. Aus demselben Grund haben wir in Φ_4 für das negative elektrische Potential φ eingeführt. Dann lautet die Potentialgleichung $\Delta\varphi = 4\pi\eta$ (η = räumliche Ladungsdichte) und stimmt mit derjenigen der NEWTONschen Gravitationstheorie (bis auf die Gravitationskonstante) überein.

¹¹ Für die zentralsymmetrische SCHWARZSCHILDsche Vakuumlösung ist hiernach in linearer Näherung:

$$m = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 - \Theta/c^2 \right),$$

Der in den Bewegungsgleichungen auftretende Faktor

$$m = \frac{m_0 c}{ds/dt} = \frac{m_0 c}{L}$$

bedeutet die träge bzw. schwere Masse des Probekörpers¹¹. Der erste Term der rechten Seite von (3 c) ist somit eine Kraft, die auf der Änderung der Trägheit des Körpers während der Bewegung beruht (im Sinne des EINSTEINSchen Prinzips der Relativität der Trägheit^{12,13}). Daß eine analoge Kraft in (3 b') nicht auftritt, liegt daran, daß die elektrische Ladung des Probekörpers im Gegensatz zur Masse unveränderlich ist.

Die übrigen Kräfte in den beiden Gleichungen entsprechen sich nunmehr vollkommen. In (3 b') steht die bekannte LORENTZ-Kraft; dieser entspricht in (3 c):

$$-m c (g_{4i|k} - g_{4k|i}) \dot{x}^i - m c^2 \left(\frac{1}{2} g_{44|k} - g_{4k|4} \right). \quad (5)$$

Die erste Klammer ist die von der Geschwindigkeit des Probekörpers linear abhängende CORIOLIS-Kraft: Sie hat die Gestalt einer LORENTZ-Kraft, bei der das \mathfrak{B} -Feld durch Rotationsbildung aus dem „Vektorpotential“ g_{4i} hervorgeht (vgl. ², S. 161):

$$\mathfrak{B} = c^2 \text{rot } g_{4i}. \quad (6)$$

Das \mathfrak{B} -Feld wirkt demnach auf einen Probekörper so ein, wie wenn in der gewöhnlichen Mechanik eine Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = -(1/2 c) \mathfrak{B}$$

des Bezugssystems gegen ein Inertialsystem vorhanden wäre.

Die zweite Klammer von (5) hat die Gestalt des elektrischen Anteils der LORENTZ-Kraft. Wir wollen deshalb auch hier von einem \mathfrak{E} -Feld sprechen und definieren:

$$\mathfrak{E}_k = c^2 (g_{44|k} - g_{4k|4}), \quad (7)$$

wobei wir den Faktor $\frac{1}{2}$ bei $g_{44|k}$ aus Symmetriegründen nicht in die Definition des \mathfrak{E} -Feldes aufnehmen¹⁴. Damit läßt sich das vereinigte $\mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ -Feld

(Θ = NEWTONsches Gravitationspotential). Die Trägheit eines Körpers nimmt also bei Annäherung an ein Gravitationszentrum zu, ganz im Sinne des EINSTEIN-MACHschen Prinzips der Relativität der Trägheit.

¹² A. EINSTEIN, Grundzüge der Relativitätstheorie, Verlag Vieweg, Braunschweig 1956, S. 64.

¹³ H. DEHNEN, H. HÖNL u. K. WESTPFAHL, Ann. Phys., Lpz. (7) 6, 370 [1960].

¹⁴ Der hier unberücksichtigte Faktor $\frac{1}{2}$ wird an späterer Stelle, nämlich in der Potentialgleichung des \mathfrak{E} -Feldes, wieder auftauchen [siehe Gl. (29 a)].

wie in der gewöhnlichen Elektrodynamik durch Rotationsbildung aus dem „Viererpotential“ (vgl. Einleitung)

$$\Phi_{\mu} = c^2 g_{4\mu} \quad (8)$$

herleiten, und zwar ist

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu} = -\mathfrak{F}_{\nu\mu} = \text{Rot}_{\mu\nu} \Phi. \quad (9)$$

Da sich bei einer stationären Metrik aus $g_{44/k}$ außer den NEWTONschen Gravitationskräften auch noch (die von der Geschwindigkeit des Probekörpers unabhängigen) Zentrifugalkräfte ergeben^{2,3}, entspricht unser \mathfrak{E} -Feld (7) sowohl dem NEWTONschen Gravitationsfeld als auch einem Zentrifugalfeld. Es ist jedoch nicht immer möglich, zwischen diesen beiden Feldern zu unterscheiden. Nur bei *stationärer* Bewegung läßt sich ein Zentrifugalfeld vom Gravitationsfeld als eine besondere Feldart abspalten. Sonst sind beide Felder zu einer Einheit (\mathfrak{E} -Feld) verschmolzen. Außerdem enthält das \mathfrak{E} -Feld im *nicht*-stationären Fall noch eine Komponente, die von der zeitlichen Änderung des Vektorpotentials (bei Massenbeschleunigungen) herrührt, auch dies analog den Verhältnissen in der Elektrodynamik bei nicht-stationären Strömen. Diese letzte Komponente wirkt auf einen Probekörper so ein wie in der gewöhnlichen Mechanik eine Beschleunigung des Bezugssystems gegen ein Inertialsystem.

Ein erstes Resultat unserer Überlegungen liegt darin, daß es möglich ist, sämtliche in der Bewegungsgleichung (3 c) enthaltenen Effekte auf eine veränderliche Trägheit des Probekörpers und auf ein Gravitations- und CORIOLIS-Feld (entsprechend elektrischem und magnetischem Feld) zurückzuführen. Diese Effekte sind von EINSTEIN bereits vor der endgültigen Fassung der allgemeinen Relativitätstheorie im Zusammenhang mit der MACHschen Kritik an der NEWTONschen Mechanik erwartet und näherungsweise auf Grund der Feldgleichungen der Gravitation berechnet worden^{12,15}. Danach nimmt erstens die Trägheit eines Körpers bei Annäherung an größere Massenansammlungen zu¹², zweitens erzeugen rotierende Massen sowohl ein CORIOLIS-Feld (\mathfrak{B} -Feld), das bewegte Körper im Sinne der Rotation ablenkt, als auch ein radiales Zentrifugalfeld (\mathfrak{E} -Feld, entsprechend $\text{grad } \varphi$)^{2,16,17}, und drittens

wirken beschleunigte Massen auf einen in der Nähe befindlichen Probekörper in gleichem Sinne beschleunigend (\mathfrak{E} -Feld, entsprechend $\partial \mathfrak{U}/\partial t$).

2. Feldgleichungen

Wir wollen jetzt die Frage erörtern, ob zwischen dem CORIOLIS-, Zentrifugal- und Gravitations-Feld (also dem \mathfrak{E} , \mathfrak{B} -Feld) und den Materieströmen und der Materiedichte ein ähnlicher Zusammenhang besteht wie zwischen dem Magnetfeld, dem elektrischen Feld und den elektrischen Strömen und Ladungen gemäß den MAXWELL-Gleichungen. Diese lassen sich in der Form

$$\text{Rot } \mathfrak{F} = 0; \quad \text{Div } \mathfrak{F} = (4 \pi/c) \mathfrak{F} \quad (10)$$

in die allgemeine Relativitätstheorie übernehmen, wobei unter Rot und Div die kovarianten Differentialoperationen zu verstehen sind¹⁸. Der Feldvektor \mathfrak{F} faßt hierin die Quantitätsgrößen \mathfrak{h} und \mathfrak{d} des elektromagnetischen Feldes zusammen¹⁹, \mathfrak{F} bedeutet die Viererstromdichte (η = räumliche Ladungsdichte):

$$\mathfrak{F} = (j^1, j^2, j^3, \eta c). \quad (10 a)$$

Zunächst ist die *erste* der Gln. (10) auch für das Gravitations- und CORIOLIS-Feld (\mathfrak{E} , \mathfrak{B} -Feld) erfüllt, da der Feldvektor \mathfrak{F} genau wie in der Elektrodynamik gemäß (9) durch Rotationsbildung aus einem Viererpotential hervorgeht. Mithin gilt für das zeitlich veränderliche CORIOLIS-Feld einerseits, das Zentrifugal- und Gravitationsfeld andererseits derselbe Zusammenhang wie für die entsprechenden Felder in der Elektrodynamik gemäß dem FARADAYschen Induktionsgesetz; ferner ist das \mathfrak{B} -Feld quellenfrei.

Die zur *zweiten* MAXWELL-Gleichung (10) analoge Gleichung für das Gravitations- und CORIOLIS-Feld soll jetzt aus den EINSTEINSCHEN Feldgleichungen der Gravitation hergeleitet werden. Diese schreiben wir zweckmäßig (mit der bekannten Bedeutung der Symbole):

$$R_{\mu}{}^{\nu} = -\kappa (T_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2} T \delta_{\mu}{}^{\nu}) - \lambda \delta_{\mu}{}^{\nu} \quad (11)$$

$$\text{mit} \quad \kappa = (8 \pi f)/c^4 \quad (11 a)$$

(f = NEWTONsche Gravitationskonstante).

Nach der Definition des Energie-Impuls-Span-

nie folgt definiert:

$$\text{Rot}_{\lambda\mu\nu} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\lambda\mu|\nu} + \mathfrak{F}_{\nu\lambda|\mu} + \mathfrak{F}_{\mu\nu|\lambda}; \quad \text{Div } {}^{\mu}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{\mu\nu}{}_{|\nu}.$$

¹⁹ Die Bezeichnung dieser Größen mit \mathfrak{F} ist dem Buch von H. WEYL, Raum, Zeit, Materie, Springer-Verlag, Berlin 1923, S. 187, entlehnt.

¹⁵ H. HÖNL, Phys. Bl. **16**, 574 [1960].

¹⁶ H. THIRING, Phys. Z. **19**, 33 [1918]; **22**, 29 [1921].

¹⁷ CH. SOERGEL-FABRICIUS, Z. Phys. **159**, 541 [1960].

¹⁸ Die kovarianten Differentialoperationen Rot und Div sind

nungstensors in der allgemein-relativistischen Hydrodynamik (Ruhdichte der Materie ϱ , Druck p)

$$T_{\mu}^{\nu} = (\varrho c^2 + p) \frac{dx_{\mu} dx^{\nu}}{ds^2} - p \delta_{\mu}^{\nu} \quad (12)$$

wird die Impulsdichte der strömenden Materie oder Energie dargestellt durch

$$p^i = (1/c) T_4^i = (1/c)(\varrho c^2 + p) \frac{dx_4 dx^i}{ds^2} \quad (12a)$$

und die Energiedichte durch

$$u = T_4^4 = (\varrho c^2 + p) \frac{dx_4 dx^4}{ds^2} - p; \quad (12b)$$

für ruhende Materie²⁰ wird daher

$$p^i = 0, \quad u = u_0 = \varrho c^2. \quad (12c)$$

Es ist demnach zu vermuten, daß die Feldgleichungen

$$R_4^{\nu} = -\kappa (T_4^{\nu} - \frac{1}{2} T \delta_4^{\nu}) - \lambda \delta_4^{\nu} \quad (11')$$

den zweiten MAXWELL-Gln. (10) entsprechen, und zwar daß

$$-(c^2/2f) R_4^i = (4\pi/c) p^i \quad (13)$$

den MAXWELL-Gleichungen

$$\text{Div}^i \mathfrak{S} = (4\pi/c) j^i \quad (13a)$$

$$\text{und} \quad -\frac{c^2}{2f} R_4^4 = \frac{4\pi}{c^2} \frac{1}{2} (u - T_4^4) + \frac{c^2}{2f} \lambda \quad (14)$$

der MAXWELL-Gleichung

$$\text{Div}^4 \mathfrak{S} = 4\pi \eta \quad (14a)$$

analog ist. Wir fragen nun, wie \mathfrak{S} im Falle des Gravitations- und CORIOLIS-Feldes definiert werden muß, damit sich diese Analogien in Identitäten verwandeln.

Zu diesem Zwecke versuchen wir zunächst unter Einführung der Faktoren ε und $1/\mu$ den der gewöhnlichen Elektrodynamik entsprechenden Ansatz, vgl. (6) und (7):

$$\mathfrak{S}_{ik} = \mathfrak{H}_{ik} = (1/\mu) \mathfrak{B}_{ik} = (1/\mu) c^2 (g_{4k|i} - g_{4i|k}), \quad (15)$$

$$\mathfrak{S}_{i4} = \mathfrak{D}_i = \varepsilon \mathfrak{E}_i = \varepsilon c^2 (g_{44|i} - g_{4i|4}).$$

Außerdem schreiben wir die linken Seiten der Gln. (13) und (14) bzw. (13a) und (14a) ausführlich hin:

$$-\frac{c^2}{2f} R_4^{\kappa} \quad (16)$$

$$= \frac{c^2}{2f} \{ -\Gamma_{4\mu|\lambda}^{\mu} + \Gamma_{4\lambda|\mu}^{\mu} - \Gamma_{4\nu}^{\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \Gamma_{4\lambda}^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} \} g^{\lambda\kappa},$$

²⁰ Es sei noch bemerkt, daß die p^i nicht die Impulsdichten der speziellen Relativitätstheorie sind, sondern als raumzeitliche Komponenten des Materietensors eine verallgemeinerte Impulsdichte darstellen. Dasselbe gilt von der Energiedichte u [vgl. Gl. (29c)].

$$\text{Div}^{\kappa} \mathfrak{S} = \{ \mathfrak{S}_{\lambda}^{\mu}{}_{|\mu} - \mathfrak{S}_{\nu}^{\mu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \mathfrak{S}_{\lambda}^{\mu} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} \} g^{\lambda\kappa}. \quad (17)$$

Der Vergleich legt es nahe, die CHRISTOFFELSchen Symbole $\Gamma_{4\nu}^{\mu}$ mit den Feldgrößen \mathfrak{S}_{ν}^{μ} in Zusammenhang zu bringen. Bemerkenswert ist dabei, daß der erste Term der rechten Seite von (16), der die Ableitung von $\Gamma_{4\mu}^{\mu}$ enthält, in (17) kein Analogon besitzt; das ist als ein Hinweis darauf aufzufassen, daß wir den Feldvektor \mathfrak{S} entsprechend (15) als schiefsymmetrischen Tensor aufzufassen haben, so daß

$$\mathfrak{S}_{\mu}^{\mu} = 0 \quad (18)$$

ist. Da aber andererseits die CHRISTOFFELSchen Symbole $\Gamma_{4\nu}^{\mu}$ durch

$$\Gamma_{4\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma|4} + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{4\sigma|\nu} - g_{4\nu|\sigma}) \quad (19)$$

definiert sind, also $\Gamma_{4\nu,\sigma}$ nur im Falle der stationären Metrik ($g_{\nu\sigma|4} = 0$) schiefsymmetrisch in ν und σ ist, kann $\mathfrak{S}_{\nu\sigma}$ zunächst nur im stationären Falle mit $\Gamma_{4\nu,\sigma}$ identifiziert werden, und zwar wird hierbei im Hinblick auf (16) und (17)

$$\mathfrak{S}_{\mu\nu} = (c^2/4f) (g_{4\nu|\mu} - g_{4\mu|\nu}), \quad (20)$$

so daß nach (15) einfach

$$\varepsilon = 1/\mu = 1/4f \quad (21)$$

ist²¹. Um den Zusammenhang (20) auch im *nicht*-stationären Falle aufrechterhalten zu können, setzen wir allgemein:

$$(c^2/2f) \Gamma_{4\nu}^{\mu} = \varepsilon c^2 g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma|4} + \mathfrak{S}_{\nu}^{\mu}. \quad (22)$$

Demgemäß läßt sich Gl. (16) mit Rücksicht auf (17) und (18) schreiben:

$$-(c^2/2f) R_4^{\kappa} = \mathfrak{S}_{\lambda}^{\mu}{}_{|\mu} g^{\lambda\kappa} \quad (23)$$

$$+ \varepsilon c^2 \{ (g^{\mu\sigma} g_{\lambda\sigma|4})_{|\mu} - (g^{\mu\sigma} g_{\mu\sigma|4})_{|\lambda} - g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma|4} \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + g^{\mu\sigma} g_{\lambda\sigma|4} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} \} g^{\lambda\kappa}.$$

Führen wir noch den (bei stationärer Metrik verschwindenden) symmetrischen Tensor

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} = \varepsilon c^2 (g_{\mu\nu|4} - g^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda|4} g_{\mu\nu}) \quad (24)$$

ein, so wird die geschweifte Klammer in (23) die Divergenz dieses Ausdrucks. Wir erhalten also

$$-\frac{c^2}{2f} R_4^{\kappa} = \mathfrak{S}^{\kappa\mu}{}_{|\mu} + \mathfrak{G}^{\kappa\mu}{}_{|\mu} = \text{Div}^{\kappa} (\mathfrak{S} + \mathfrak{G}). \quad (25)$$

²¹ Der in den Kopplungskonstanten ε und μ auftretende Faktor 4 ist derselbe, der schon früher bei ähnlichen Analogiebetrachtungen aufgefallen ist^{1, 2}.

Damit nehmen die Gln. (13) und (14) zunächst die einfache Gestalt an:

$$\text{Div}^i(\tilde{\mathfrak{G}} + \mathfrak{G}) = (4\pi/c) \mathfrak{p}^i, \quad (26)$$

$$\text{Div}^4(\tilde{\mathfrak{G}} + \mathfrak{G}) = (4\pi/c^2) \frac{1}{2}(u - T_i^i) + 2\varepsilon c^2 \lambda. \quad (27)$$

Um diese Feldgln. schließlich in eine (13 a) und (14 a) völlig analoge Form zu setzen — auf der linken Seite steht die Divergenz eines *schiefsymmetrischen* Tensors — bringen wir $\text{Div}^\mu \mathfrak{G}$ auf die rechte Seite, indem wir noch impuls- und energieartige Komponenten \mathfrak{g}^i und \mathfrak{g}^4 definieren²²:

$$\text{Div}^i \mathfrak{G} = - (4\pi/c) \mathfrak{g}^i, \quad \text{Div}^4 \mathfrak{G} = - (4\pi/c) \mathfrak{g}^4. \quad (28)$$

Damit nehmen die Feldgln. die *endgültige* Gestalt an²³:

$$\begin{aligned} \text{Div}^i \tilde{\mathfrak{G}} &= (4\pi/c) (\mathfrak{p}^i + \mathfrak{g}^i), \\ \text{Div}^4 \tilde{\mathfrak{G}} &= (4\pi/c) (\mathfrak{p}^4 + \mathfrak{g}^4) \end{aligned} \quad (29)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^4 &= (1/2c) (u - T_i^i) + (\varepsilon c^3/2\pi) \lambda \\ &= (1/2c) (u_0 + 4k + 3p) \\ &\quad + (\varepsilon c^3/2\pi) \lambda, \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\text{wobei} \quad k = -\frac{1}{2}(\varrho c^2 + p) \frac{dx_i dx^i}{ds^2} \quad (29b)$$

die kinetische Energiedichte der strömenden Materie (oder Energie) bedeutet²⁴. Zwischen u und k besteht die einfache Relation [vgl. (12 b)]:

$$u - 2k = (\varrho c^2 + p) \frac{dx_\mu dx^\mu}{ds^2} - p = \varrho c^2 = u_0. \quad (29c)$$

Es ist nun naheliegend, zu vermuten, daß \mathfrak{g}^i (neben \mathfrak{p}^i) die Impulsdichte des *nicht*-stationären Gravitationsfeldes darstellt und \mathfrak{g}^4 (neben \mathfrak{p}^4) die mit der Impulsdichte verbundene Energiedichte des Gravitationsfeldes bedeutet, entsprechend der kinetischen Energiedichte der bewegten Materie. Denn es verschwindet \mathfrak{g}^4 zusammen mit \mathfrak{g}^i im stationären Fall. Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, daß sich diese Vermutung bestätigt.

Die Definitionen (20), (24) und (28) gestatten es also, die Feldgleichungen der Gravitation für die Komponenten $g_{4\mu}$ des metrischen Feldes in die den MAXWELL-Gleichungen entsprechende Form

$$\text{Div} \tilde{\mathfrak{G}} = (4\pi/c) (\mathfrak{p} + \mathfrak{g}) \quad (30)$$

zu bringen. Äußerlich besteht der einzige Unterschied zur Elektrodynamik in der zusätzlichen Ener-

gie-Impulsdichte \mathfrak{g} , zu der es in den MAXWELL-Gleichungen kein Analogon gibt. Wenn die vorliegende Darstellung die *allgemeine* Integration der Feldgleichungen auch nicht erleichtern dürfte, so wird sie sich jedoch vor allem dort als nützlich erweisen, wo man zu einer gegebenen Grundmetrik CORIOLIS- und Zentrifugalfelder berechnen möchte, die durch nachträglich eingeführte (die Grundmetrik nicht wesentlich störende) Materieströme erzeugt werden (vgl. Abschnitt 5). Überhaupt ist allein in diesem Grenzfall *schwacher* Felder die Analogie zu den MAXWELL-Gleichungen vollständig; nur dann haben wir nämlich ein *lineares* Differentialgleichungssystem für die Feldgrößen, entsprechend den MAXWELL-Gleichungen. Für starke Felder ist die Analogie mehr äußerlich, da in diesem Fall die Gleichungen infolge der kovarianten Ableitungen *nicht-linear* in den Feldgrößen sind. Darüber hinaus gestattet unsere Darstellung aber auch einen tieferen Einblick in das Zustandekommen der Gravitationswirkungen gemäß den EINSTEINSCHEN Feldgleichungen (s. insbesondere Abschnitt 4). Der Verzicht, der hierbei allerdings in Kauf genommen werden muß, besteht in der Aufgabe eines wesentlichen Teils der Invarianzeigenschaften des metrischen Feldes (s. Einleitung).

3. Erhaltungssätze

In der Elektrodynamik ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für Strom und Ladung, indem man die für schiefsymmetrische Tensoren gültige Relation

$$\text{Div}(\text{Div}^\mu \tilde{\mathfrak{G}}) = (\text{Div}^\mu \tilde{\mathfrak{G}})_{||\mu} = 0 \quad (31)$$

auf die MAXWELL-Gleichungen anwendet. Dementsprechend erhalten wir aus den Feldgln. (30) folgende Kontinuitätsgleichung für *Gravitationsfeld und Materie*:

$$\text{Div}(\mathfrak{p} + \mathfrak{g}) = 0. \quad (32)$$

Da andererseits für die Materie allein auf Grund der Divergenzfreiheit von T_{μ}^{ν} bereits die Kontinuitätsgleichung

$$(1/c) T_{4\mu}^{||\mu} = 0 \quad (33)$$

gilt, die mit Rücksicht auf (12 a) und (12 b) in die Form

$$\text{Div}(\mathfrak{p}^i, u/c) - (1/c) T_{4\mu}^{\nu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (33a)$$

²² A. EINSTEIN, Ann. Phys., Lpz. **49**, 804 [1916]; §§ 15, 16.

²³ S. N. GUPTA, Phys. Rev. **96**, 1683 [1954].

²⁴ Wir haben im Ansatz für den Energietensor (12) Spannungen der Materie nicht aufgenommen. Solche können aber ohne weiteres nachträglich in \mathfrak{p} berücksichtigt werden.

gesetzt werden kann, so ergibt sich durch Subtraktion von (32) und (33 a) für das Gravitationsfeld folgende Kontinuitätsgleichung

$$\text{Div}[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^4 - (u/c) + \mathfrak{g}^4] + (1/c) T_{4\mu}^\nu T_\nu^\mu = 0. \quad (34)$$

Hiernach beträgt die Impuls- und Energiedichte des Gravitationsfeldes ²⁵:

$$(1/c) t_4^i = \mathfrak{g}^i, \quad t_4^4 = c(\mathfrak{p}^4 + \mathfrak{g}^4) - u. \quad (35)$$

Während der Div-Term in (34) den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Energiedichte und der räumlichen Divergenz des Energiestromes des Gravitationsfeldes enthält, bringt der letzte Term die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und Materie zum Ausdruck ²⁶: Das Gravitationsfeld überträgt Energie und Impuls auf die Materie.

Wir wollen nachträglich zeigen, daß die Definition (35) der üblichen Energie-Impulsdefinition des Gravitationsfeldes gemäß

$$\{ \sqrt{-g} (T_4^\mu + t_4^\mu) \}_{|\mu} = 0, \quad g = |g_{\mu\nu}| \quad (36)$$

völlig äquivalent ist. Dazu setzen wir (35) in diese Gleichung ein und prüfen, ob sie erfüllt ist. Das ist in der Tat der Fall. Denn substituieren wir noch T_4^μ gemäß (12 a) und (12 b), so ergibt sich genau die Kontinuitätsgleichung (32).

Darüber hinaus gelten für das \mathfrak{G} , \mathfrak{B} -Feld wegen der Feldgln. (30) ganz analoge Beziehungen wie für die entsprechenden Felder in der Elektrodynamik. Insbesondere läßt sich ein „Energie-Impuls-Spannungstensor“ angeben, dessen Divergenz die Kraft- und Leistungsdichte des \mathfrak{G} , \mathfrak{B} -Feldes ergibt. Die Kraftwirkungen werden auch hier von den „Spannungen“ des Feldes übertragen, ganz im Sinne der FARADAY-MAXWELLSchen Idee der Feldwirkung. Ebenso läßt sich eine Ausbreitungsgleichung für das \mathfrak{G} , \mathfrak{B} -Feld herleiten.

4. Die Quellen des Gravitationsfeldes (\mathfrak{G} -Feld) und des Coriolis-Feldes (\mathfrak{B} -Feld)

a) In *statischen* Räumen, in denen die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ von der Zeit unabhängig und CORIOLIS-Felder nicht vorhanden sind, treten auch keine Materieströme auf: $\mathfrak{p}^i = 0$. Ursache des Gravitationsfeldes sind nach (29) und (29 a) allein die

Ruhenergiedichte u_0 der Materie, der Druck p und allenfalls die kosmologische Konstante λ . Ein Beispiel hierzu ist die SCHWARZSCHILDsche Lösung für eine ruhende Flüssigkeitskugel ²⁷.

b) In *stationären* Räumen, in denen die Gravitationspotentiale ebenfalls von der Zeit nicht abhängen, aber CORIOLIS-Felder vorhanden sind, liegt der Ursprung dieser Felder in den *stationären Materieströmen* \mathfrak{p}^i . Die Gln. (29) für die Quellen des CORIOLIS-Feldes stimmen mit den entsprechenden Gln. (13 a) für das stationäre Magnetfeld genau überein. Als Ursache für das *Gravitationsfeld* erscheint hier in (29 a) zusätzlich noch die kinetische Energiedichte k der strömenden Materie. Sie erzeugt insbesondere bei rotatorischer Bewegung der Materie Zentrifugalkräfte. An dieser Bezeichnungsweise wollen wir auch dann festhalten, wenn diese Kräfte je nach der Verteilung der kinetischen Energiedichte nicht zentrifugal, sondern zentripetal gerichtet sind (vgl. Abschn. 5, Absatz d).

Es muß jedoch besonders hervorgehoben werden, daß das CORIOLIS-Feld durch die Impulsdichte im Endlichen nicht immer eindeutig festgelegt wird. Vielmehr sind zur vollständigen Bestimmung des CORIOLIS-Feldes außer den Feldgln. (29) im allgemeinen noch Grenzbedingungen im räumlich Unendlichen notwendig. Aus den Sätzen von CH. SOERGEL-FABRICIUS ²⁸ läßt sich entnehmen, daß nur in einer *räumlich geschlossenen Welt*, in der Grenzbedingungen im Unendlichen überhaupt entfallen, das CORIOLIS-Feld ausschließlich durch die Impulsdichte (im Endlichen) festgelegt wird.

Dieser Umstand wirft auch ein gewisses Licht auf die Eigentümlichkeiten des GÖDEL-Kosmos ²⁹. Bekanntlich handelt es sich hierbei um ein homogen mit Materie erfülltes, unendlich ausgedehntes stationäres Universum *ohne Materieströme im Endlichen, aber mit nicht verschwindendem CORIOLIS-Feld*. Im Sinne der obigen Bemerkung über den Einfluß des Unendlichen kann dieser zunächst paradox erscheinende Sachverhalt folgendermaßen verständlich gemacht werden: Ein Universum mit gleichmäßiger Dichte sei in einzelne Zellen mit rotierendem (materiellem) Inhalt aufgeteilt; und zwar sollen die axialen Vektoren des Impulsmomentes der Zellen „*lokal*

²⁵ Man wird in t_4^4 nur Größen des metrischen Feldes erwarten. Das läßt sich erreichen, wenn man $c \mathfrak{p}^4 - u$ auf Grund der Feldgln. (11) durch Feldgrößen ersetzt; man erhält:

$$t_4^4 = c \mathfrak{g}^4 - (1/\kappa) (\tfrac{1}{2} R + \lambda).$$

²⁶ Einem solchen Term entspricht in der Elektrodynamik die JOULEsche Wärme.

²⁷ K. SCHWARZSCHILD, Berliner Sitzungsberichte 1916, S. 424.

²⁸ CH. SOERGEL-FABRICIUS, Z. Phys. **161**, 401 [1961].

²⁹ K. GÖDEL, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 [1949].

parallel“ gerichtet sein. Offensichtlich kompensieren sich hierbei die Materieströme nahezu, falls man über Raumteile mittelt, welche eine größere Zahl von Zellen enthalten; es ist also näherungsweise im ganzen betrachteten Raumgebiet

$$\mathfrak{p}^i = 0.$$

Das betrachtete (endliche) Raumgebiet ist aber andererseits von einem Materie-Ringstrom umgeben, der für das Auftreten von CORIOLIS-Kräften verantwortlich gemacht werden kann (ähnlich wie bei den AMPÈRESchen Molekularströmen, welche das Magnetfeld der Ferromagnetika erzeugen). Offenbar ändert sich hierbei im wesentlichen auch dann nichts, wenn man immer größere Raumteile betrachtet und schließlich zum unendlichen Raum übergeht. In diesem Sinne kann das Auftreten von CORIOLIS-Kräften im GÖDEL-Kosmos ohne (makroskopische) Materiestromung auf einen *unendlich fernen* Ringstrom zurückgeführt werden, der aber in den Gleichungen der Theorie keinen Ausdruck findet³⁰. Es scheint, daß nach diesem Modell einer (in den Gleichungen latent bleibenden) inneren Materiestromung das Verhalten des GÖDEL-Kosmos physikalisch weitgehend verständlich gemacht werden kann.

Beispiele stationärer Felder mit *strömender Materie im Endlichen* sind einerseits die rotierende Hohlkugel im unendlichen Universum^{2, 16}, andererseits das Modell rotierender Massen im EINSTEIN-Kosmos¹⁷. Die gegen den unendlichen Raum langsam rotierende Flüssigkeitskugel soll im nächsten Abschnitt als Beispiel für die Anwendbarkeit unserer Gleichungen behandelt werden.

c) In *nicht-stationären* Räumen, in denen die Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ von der Zeit abhängen, liegt der Ursprung für das CORIOLIS-Feld nach Gl. (29) *einerseits in der Impulsdichte der Materie* \mathfrak{p}^i , *andererseits in der Impulsdichte des Gravitationsfeldes* g^i . Als zusätzliche Quelle für das \mathfrak{G} -Feld erscheint die zu g^i gehörende Energiedichte g^4 .

Bis heute sind nur wenige nicht-stationäre Lösungen der EINSTEINSCHEN Feldgleichungen bekannt. Es sind dies die FRIEDMANN-LEMAITRESCHEN Lösungen für das expandierende Universum³¹. Der Kosmos

ist hierbei mit einer homogenen Materiedichte ϱ erfüllt und besitzt eine (nur von t abhängige) isotrope Expansion, wie es den tatsächlichen Verhältnissen weitgehend entspricht (HUBBLESche Nebelflucht). Allerdings treten keine CORIOLIS-Felder auf, und deshalb sind diese Lösungen zur näheren Erläuterung der voranstehenden Sätze nicht geeignet. Ebenso wie die Impulsdichte \mathfrak{p}^i der Materie verschwindet in diesen isotrop expandierenden Weltmodellen die Impulsdichte g^i des Gravitationsfeldes.

5. Die rotierende Flüssigkeitskugel als Beispiel

a) Grundmetrik

Wir legen den folgenden Überlegungen die bekannte SCHWARZSCHILDsche Lösung der EINSTEINSCHEN Feldgleichungen für eine ruhende inkompressible Flüssigkeitskugel der Dichte ϱ zugrunde³². Sei r_1 der Radius der Flüssigkeitskugel, so lautet die Metrik in räumlichen Polarkoordinaten für $r \leq r_1$

$$ds^2 = -e^u dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + e^v (dx^4)^2$$

mit $e^{-u} = 1 - (r^2/R_0^2)$, $R_0^2 = (3/\kappa \varrho c^2)$,
 $e^v = (A - \frac{1}{2}\sqrt{1 - r^2/R_0^2})^2$, $A = \frac{3}{2}\sqrt{1 - r_1^2/R_0^2}$

und für $r \geq r_1$

$$ds^2 = -e^{-w} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + e^w (dx^4)^2$$

mit $e^w = 1 - M^2$,
 $M^2 = 2m/c^2 r$, $m = (4\pi/3) \varrho r_1^3$.

Der Druck p in der Flüssigkeitskugel ist

$$\kappa p = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{1 - r^2/R_0^2} - A}{R_0^2(A - \frac{1}{2}\sqrt{1 - r^2/R_0^2})}$$

oder angenähert

$$p = \frac{2}{3}\pi f(r_1^2 - r^2) \varrho^2 = \frac{1}{4}[(r_1^2 - r^2)/R_0^2] \varrho c^2. \quad (37)$$

Die kosmologische Konstante λ haben wir Null gesetzt.

Diese SCHWARZSCHILDsche Lösung soll nun dahingehend modifiziert werden, daß die Flüssigkeitskugel um die z -Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ langsam rotiert ($r\omega/c \ll 1$). Dabei möge die Dichte der Flüssigkeit als so klein angenommen werden, daß wir im folgenden die in

³⁰ In ähnlicher Weise kann in der Elektrodynamik zu einem homogenen Magnetfeld stets ein das Magnetfeld erzeugender unendlich ferner Ringstrom hinzugedacht werden. Der GÖDEL-Kosmos ist daher ein spezielles metrisches Analogon zum homogenen Magnetfeld in der Elektrodynamik. (Ein anderes einfaches Analogon ist das „rotierende“ Laboratorium.) Beide Lösungen, der MAXWELL-Gleichungen in der

Elektrodynamik bzw. der Gravitationsgleichungen, haben einen stark idealisierenden Charakter.

³¹ P. JORDAN, *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg, Braunschweig 1955, S. 101 ff.

³² K. SCHWARZSCHILD, *Anm.* ²⁷ und *Berliner Sitzungsberichte* 1916, S. 189.

$\propto \varrho$ quadratischen Glieder gegen die übrigen vernachlässigen dürfen. Wir haben demnach für $r < r_1$:

$$\begin{aligned} p^1 &= p^r = 0, \quad p^2 = p^\vartheta = 0, \\ p^3 &= p^\varphi = (1/c) (\varrho c^2 + p) \frac{dx^4 g_{44} d\varphi}{ds^2}, \\ p^4 &= (1/2 c) (\varrho c^2 + 4k + 3p), \\ k &= -\frac{1}{2} (\varrho c^2 + p) \frac{g_{33} d\varphi^2}{ds^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Hierin wollen wir alle bis zu den in ω quadratischen Gliedern berücksichtigen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} p^1 &= p^2 = 0, \quad p^3 = (\varrho c^2 + p) (\omega/c^2), \\ p^4 &= (1/2 c) \left\{ \varrho c^2 + 3p + 2(\varrho c^2 + p) \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{c^2 g_{44}} \right\}. \end{aligned} \quad (38 a)$$

Ferner ist für dieses stationäre Problem

$$g = 0. \quad (38 b)$$

Damit können wir jetzt die durch die Rotation der

Flüssigkeitskugel erzeugten CORIOLIS- und Zentrifugalfelder auf Grund der Feldgl. (29) berechnen.

b) Die Feldgleichungen

Wir wollen im folgenden den geringen Einfluß des Druckes p gegenüber dem der Dichte ϱ unberücksichtigt lassen [vgl. Gl. (37)]. Die beiden ersten Gln. (29) ($i=1, 2$) lauten somit sowohl für $r < r_1$

als auch für $r > r_1$:

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{12|2} + (1/\sin^2 \vartheta) \tilde{\mathfrak{S}}_{13|3} + \tilde{\mathfrak{S}}_{12} \operatorname{ctg} \vartheta = 0, \quad (39)$$

$$r^2 \tilde{\mathfrak{S}}_{21|1} + (1/\sin^2 \vartheta) \tilde{\mathfrak{S}}_{23|3} = 0. \quad (40)$$

Andererseits gilt aus Symmetriegründen

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{12} = 0, \quad \tilde{\mathfrak{S}}_{\mu\nu|3} = 0, \quad (41)$$

so daß die beiden Gln. (39) und (40) bereits erfüllt sind. Die dritte Gl. (29) ($i=3$) lautet mit Rücksicht auf (41), (38 a) und (38 b) innerhalb unserer Näherung

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{31|1} + \frac{1}{r^2} \tilde{\mathfrak{S}}_{32|2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \tilde{\mathfrak{S}}_{23} = \begin{cases} (4\pi/c) \varrho \omega r^2 \sin^2 \vartheta, & r < r_1 \\ 0, & r > r_1 \end{cases} \quad (42)$$

und die vierte

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{41|1} + \frac{2}{r} \tilde{\mathfrak{S}}_{41} + \frac{1}{r^2} \tilde{\mathfrak{S}}_{42|2} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \tilde{\mathfrak{S}}_{42} = \begin{cases} -2\pi\varrho - 4\pi\varrho(\omega^2/c^2)r^2 \sin^2 \vartheta, & r < r_1 \\ 0, & r > r_1. \end{cases} \quad (43)$$

Wir dürfen aus Symmetriegründen annehmen, daß auch die zu $\tilde{\mathfrak{S}}$ gehörenden Potentiale g_{4i} von φ nicht abhängen. Dann haben wir

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{3i} = -(c^2/4f) g_{43|i} \quad (44)$$

und wegen der Stationarität

$$\tilde{\mathfrak{S}}_{4i} = -(c^2/4f) \bar{g}_{44|i}, \quad \bar{g}_{44} = g_{44} + \gamma. \quad (44 a)$$

(Dabei ist also γ die durch die Rotation der Flüssigkeitskugel hervorgerufene Störung des Potentials g_{44} für die ruhende Kugel.) Damit erhalten wir aus (42) und (43):

$$-g_{43|1|1} - \frac{1}{r^2} g_{43|2|2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta g_{43|2} = \begin{cases} 2\varrho\omega c r^2 \sin^2 \vartheta, & r < r_1, \\ 0, & r > r_1, \end{cases} \quad (42 a)$$

$$\gamma_{|1|1} + \frac{2}{r} \gamma_{|1} + \frac{1}{r^2} \gamma_{|2|2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \gamma_{|2} = \begin{cases} 2\varrho\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta, & r < r_1, \\ 0, & r > r_1. \end{cases} \quad (43 a)$$

Die Lösung der ersten Gleichung ist das „Potential“ für das CORIOLIS-Feld, die Lösung der zweiten Gleichung das „Potential“ für das Zentrifugalfeld der rotierenden Kugel.

c) Das CORIOLIS-Feld

Zur Lösung von (42 a) machen wir im Hinblick auf die rechte Seite den Separationsansatz:

$$g_{43} = f(r) \sin^2 \vartheta. \quad (45)$$

Damit erhalten wir:

$$-f'' + (2/r^2) f = \begin{cases} 2\varrho\omega c r^2, & r < r_1, \\ 0, & r > r_1. \end{cases} \quad (46)$$

Diese Diff.-Gln. lösen wir durch einen Reihenansatz; wir setzen

$$f(r) = \sum_n a_n r^n \quad \text{für } r < r_1, \quad (47)$$

$$f(r) = \sum_n b_n r^n \quad \text{für } r > r_1 \quad (47 a)$$

mit a_n und b_n als zu bestimmenden Konstanten (n positiv oder negativ ganzzahlig oder 0).

Es ergibt sich als Lösung

$$f(r) = -\frac{1}{5} \varrho\omega c r^4 + a_2 r^2 + a_{-1} r^{-1} \quad \text{für } r < r_1, \quad (47')$$

$$f(r) = b_2 r^2 + b_{-1} r^{-1} \quad \text{für } r > r_1. \quad (47 a')$$

Wir müssen nun verlangen, daß (47') im Innern der Flüssigkeitskugel singularitätenfrei ist und daß (47 a') im Unendlichen verschwindet, damit unsere Lösung dort in die MINKOWSKI-Metrik übergeht (Grenzbedingung im Unendlichen). Deshalb haben wir

$$a_{-1} = 0, \quad b_2 = 0$$

zu setzen. Die allein von Null verschiedenen Konstanten a_2 und b_{-1} werden dadurch bestimmt, daß die beiden Lösungen (47') und (47 a') an der Flüssigkeitsoberfläche $r = r_1$ stetig und mit stetiger erster Ableitung ineinander übergehen müssen. Es ergibt sich so:

$$a_2 = \frac{1}{3} \kappa \varrho \omega c r_1^2, \quad b_{-1} = \frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c r_1^5. \quad (48)$$

Damit lauten die Komponenten des Vektorpotentials für das CORIOLIS-Feld für $r < r_1$

$$\begin{aligned} g_{41} &= 0, & g_{42} &= 0, \\ g_{43} &= \kappa \varrho \omega c \left(\frac{1}{3} r_1^2 - \frac{1}{5} r^2 \right) r^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (49)$$

und für $r > r_1$

$$\begin{aligned} g_{41} &= 0, & g_{42} &= 0, \\ g_{43} &= \frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c (r_1^5/r) \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (49 a)$$

Die Komponenten des \mathfrak{B} -Feldes sind für $r < r_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_r &= 2 \kappa \varrho \omega c^3 \left(\frac{1}{3} r_1^2 - \frac{1}{5} r^2 \right) r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{B}_\vartheta &= -2 \kappa \varrho \omega c^3 \left(\frac{1}{3} r_1^2 - \frac{2}{5} r^2 \right) r \sin^2 \vartheta, \\ \mathfrak{B}_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

und für $r > r_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_r &= \frac{4}{15} \kappa \varrho \omega c^3 (r_1^5/r) \sin \vartheta \cos \vartheta \\ &= (4 f/c) (I/r) \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \mathfrak{B}_\vartheta &= \frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c^3 (r_1^5/r^2) \sin^2 \vartheta \\ &= (2 f/c) (I/r^2) \sin^2 \vartheta, \\ \mathfrak{B}_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (50 a)$$

wobei $I = \frac{8}{15} \pi \varrho r_1^5 \omega$

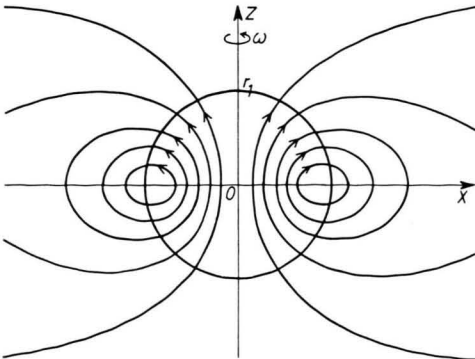


Abb. 1. Schnitt durch das um die z -Achse rotationssymmetrische CORIOLIS-Feld (\mathfrak{B}) der rotierenden Flüssigkeitskugel.

den Drehimpuls der rotierenden Flüssigkeitskugel bedeutet.

Die Intensität des \mathfrak{B} -Feldes beträgt für $r > r_1$

$$|\mathfrak{B}| = 2 (f/c) (I/r^3) \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}.$$

\mathfrak{B} beschreibt also ein Dipolfeld, dessen Stärke dem Drehimpuls der rotierenden Kugel proportional ist (und bekanntlich mit der dritten Potenz von r abnimmt). Der Verlauf des \mathfrak{B} -Feldes ist in Abb. 1 dargestellt.

d) Das Zentrifugalfeld

Zur Lösung der Diff.-Gl. (43 a) erweist sich ein Ansatz der folgenden Art als geeignet:

$$\gamma = f(r) \sin^2 \vartheta + g(r). \quad (45 a)$$

Damit erhalten wir für f und g folgende Diff.-Gln.:

$$f'' + (2/r) f' - (6/r^2) f = \begin{cases} 2 \kappa \varrho r^2 \omega^2, & r < r_1, \\ 0, & r > r_1, \end{cases} \quad (51)$$

$$g'' + (2/r) g' + (4/r^2) f = 0. \quad (52)$$

Wir lösen sie wieder durch Reihenansätze:

$$f(r) = \sum_n a_n r^n, \quad g(r) = \sum_n \alpha_n r^n, \quad (53)$$

für $r < r_1$, wobei $a_n, \alpha_n = \text{const.}$, und

$$f(r) = \sum_n b_n r^n, \quad g(r) = \sum_n \beta_n r^n, \quad (53 a)$$

für $r > r_1$, wobei $b_n, \beta_n = \text{const.}$

Berücksichtigen wir, daß die Lösung im Innern der Flüssigkeitskugel singularitätenfrei sein muß und im Unendlichen in die MINKOWSKI-Metrik übergehen soll (Grenzbedingung im Unendlichen), so erhalten wir für $r < r_1$

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{7} \kappa \varrho \omega^2 r^4 + a_2 r^2, \\ g(r) &= -\frac{1}{35} \kappa \varrho \omega^2 r^4 - \frac{2}{3} a_2 r^2 + \alpha_0 \end{aligned} \quad (53')$$

und für $r > r_1$

$$\begin{aligned} f(r) &= b_{-3} r^{-3}, \\ g(r) &= -\frac{2}{3} b_{-3} r^{-3} + \beta_{-1} r^{-1}. \end{aligned} \quad (53 a')$$

Die vier Konstanten a_2, b_{-3} und α_0, β_{-1} werden durch die Anschlußbedingung bestimmt, daß die Lösungen (53') und (53 a') an der Flüssigkeitsoberfläche $r = r_1$ stetig und mit stetiger erster Ableitung ineinander übergehen müssen. Es ergibt sich so:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{5} \kappa \varrho \omega^2 r_1^2, & b_{-3} &= -\frac{2}{35} \kappa \varrho \omega^2 r_1^7, \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{3} \kappa \varrho \omega^2 r_1^4, & \beta_{-1} &= -\frac{4}{15} \kappa \varrho \omega^2 r_1^5. \end{aligned} \quad (54)$$

Damit lautet das Potential für das „Zentrifugalfeld“ für $r < r_1$

$$\gamma = \kappa \varrho \omega^2 \left\{ \left(\frac{1}{7} r^2 - \frac{1}{5} r_1^2 \right) r^2 \sin^2 \vartheta - \frac{1}{35} r^4 + \frac{2}{15} r_1^2 r^2 - \frac{1}{3} r_1^4 \right\} \quad (55)$$

und für $r > r_1$

$$\gamma = \frac{2}{5} \kappa \varrho \omega^2 \left\{ \left(\frac{2}{3} - \sin^2 \vartheta \right) \frac{1}{7} (r_1^7 / r^3) - \frac{2}{3} (r_1^5 / r) \right\}. \quad (55 \text{ a})$$

Die Komponenten des Zentrifugalfeldes $\mathfrak{Z} = -\text{grad } \gamma$ (Bestandteil des \mathfrak{G} -Feldes) sind für $r < r_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_r &= -2 \kappa \varrho \omega^2 c^2 r \left\{ \left(\frac{2}{7} r^2 - \frac{1}{5} r_1^2 \right) \sin^2 \vartheta + \frac{2}{15} r_1^2 - \frac{2}{35} r^2 \right\}, \\ \mathfrak{Z}_\vartheta &= 2 \kappa \varrho \omega^2 c^2 \left(\frac{1}{5} r_1^2 - \frac{1}{7} r^2 \right) r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \mathfrak{Z}_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

und für $r > r_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_r &= -\frac{2}{5} \kappa \varrho \omega^2 c^2 \left\{ \frac{2}{3} (r_1^5 / r^2) - \left(\frac{2}{3} - \sin^2 \vartheta \right) \frac{2}{7} (r_1^7 / r^4) \right\}, \\ \mathfrak{Z}_\vartheta &= \frac{4}{35} \kappa \varrho \omega^2 c^2 (r_1^7 / r^3) \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \mathfrak{Z}_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (56 \text{ a})$$

Das \mathfrak{Z} -Feld ist in Abb. 2 dargestellt. Der Feldlinienverlauf wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die „Zentrifugalkraft“ auf der Gravitationswirkung der kinetischen Energie der Materie beruht. Für große Abstände von der rotierenden Kugel wird das \mathfrak{Z} -Feld zentralsymmetrisch und nimmt wie $1/r^2$ ab. Wir haben als einzige von Null verschiedene Komponente

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_r &= -\frac{4}{15} \kappa \varrho \omega^2 c^2 (r_1^5 / r^2) \\ &= -(8 f / c^2) (T / r^2), \end{aligned} \quad (56 \text{ b})$$

wobei

$$T = \frac{4}{15} \pi \varrho \omega^2 r_1^5$$

die kinetische Energie der rotierenden Flüssigkeitskugel bedeutet. Daß das \mathfrak{Z} -Feld in der Nähe der rotierenden Kugel nicht mehr zentralsymmetrisch ist,

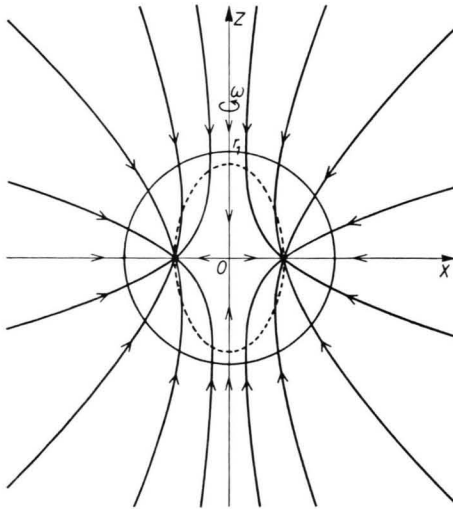


Abb. 2. Schnitt durch das um die z -Achse rotationssymmetrische Zentrifugalfeld (\mathfrak{Z}) der rotierenden Vollkugel. Die Kraftlinien versickern einerseits in der Äquatorebene bei $r=0$ und $r=0,54 r_1$, andererseits im Unendlichen. Nur innerhalb der gestrichelt eingezeichneten Ellipse (Rotationsellipsoid) $24 x^2 + 9 z^2 = 7 r_1^2$ hat das Feld mit Ausnahme auf der z -Achse eine zentrifugale Komponente. Außerhalb der Ellipse und auf der ganzen z -Achse ist es dagegen zentripetal.

beruht auf der rotationssymmetrischen Verteilung der kinetischen Energiedichte innerhalb der Kugel.

Es sei hier besonders hervorgehoben, daß das Gravitationsfeld (\mathfrak{G} -Feld) der rotierenden Kugel schließlich noch dadurch eine Korrektur erfährt, daß die Flüssigkeitskugel infolge der Rotation zu einem Ellipsoid abgeplattet wird. Da sich für die mathematische Behandlung unseres Problems aber eine exakte Kugelgestalt des rotierenden Körpers als besonders geeignet erwiesen hat, berücksichtigt man statt einer Abplattung der Kugel besser künstlich eingeführte innere Spannungen σ_{ik} , die eine Abplattung der Kugel verhindern. Der einzige Unterschied zur voranstehenden Rechnung besteht dann darin, daß es in (38) heißt

$$p^4 = (1/2 c) (\varrho c^2 + 4 k + 3 p - \sigma_i^i),$$

wobei wir die Spur σ_i^i unmittelbar der zitierten Arbeit von HÖNL und MAUE² entnehmen können:

$$\sigma_i^i = \varrho \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Der einzige Einfluß der Spannungen σ_{ik} auf die entscheidende Gl. (43 a) für das Zentrifugalfeld besteht dann schließlich darin, daß die rechte Seite um den Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner ist, so daß bei Berücksichtigung der inneren Spannungen der Kugel lediglich die Potentiale des Zentrifugalfeldes und damit die Feldstärke selbst mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren sind.

e) Experimentelle Nachprüfung des CORIOLIS-Feldes

Abschließend wollen wir den Einfluß der Rotation eines Himmelskörpers (Sonne oder Planet) auf einen Satelliten (Planet oder Mond) untersuchen. Dabei beschränken wir uns allein auf die Effekte, die linear in der Winkelgeschwindigkeit ω des Himmelskörpers sind, d. h. allein auf den Einfluß des CORIOLIS-Feldes. Zunächst soll der Einfluß auf die Umlauffrequenz, dann der Einfluß auf die Perizentrumsbewegung des Satelliten berechnet werden.

Nehmen wir an, daß sich ein Mond auf einer Kreisbahn in der Äquatorebene eines Planeten bewegt, dann erhalten wir nach (3 c) und (50 a) für die Kreisfrequenz ω_M des Mondes folgende Beziehung:

$$\omega_M^2 r - (m f / r^2) + \frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c^2 (r_1^5 / r^2) \omega_M = 0; \quad (57)$$

f = NEWTONsche Gravitationskonstante, m = Masse des Planeten, r = Entfernung zwischen Planet und Mond, r_1 = Halbmesser des Planeten.

Die Auflösung dieser Gleichung nach ω_M ergibt, wenn wir nur die in ω linearen Glieder berücksichtigen:

$$\omega_M = \sqrt{m f / r^3} - \frac{2}{5} (m f / r^3) (r_1^2 / c^2) \omega. \quad (58)$$

Der Betrag von ω_M ist also bei gleichsinnigem Umlauf von Planet und Satellit kleiner, bei ungleichsinnigem Umlauf größer, als nach der gewöhnlichen NEWTONschen Gravitationstheorie zu erwarten ist. Der relative Unterschied beläuft sich auf

$$(\Delta \omega_M / \omega_M) = -\frac{2}{5} \sqrt{m f / r^3} (r_1^2 / c^2) \omega. \quad (59)$$

Selbst für den günstigsten aller Monde innerhalb unseres Planetensystems, für den innersten Jupitermond, beträgt

$$(\Delta \omega_M / \omega_M) = -5,7 \cdot 10^{-10}$$

und liegt somit weit unterhalb der Beobachtungsgrenze.

Nehmen wir weiter an, daß sich der Mond in der Äquatorebene auf einer *elliptischen* Bahn bewegt, so ergibt sich außer der Perizentrumsbewegung gemäß dem EINSTEIN-Effekt noch eine zusätzliche Perizentrumsdrehung, die vom CORIOLIS-Feld herrührt. Letztere soll hier berechnet werden. Die Bewegungsgleichungen hierzu lauten nach (3 c) und (50 a):

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c^2 (r_1^5 / r^2) \dot{\varphi} - (m f / r^2), \quad (60)$$

$$r^2 \ddot{\varphi} + 2 r \dot{r} \dot{\varphi} = -\frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c^2 (r_1^5 / r^2) \dot{r}. \quad (61)$$

Die letzte Diff.-Gl. läßt sich integrieren (verallgemeinerter Flächenansatz):

$$r^2 \dot{\varphi} - \frac{2}{15} \kappa \varrho \omega c^2 (r_1^5 / r) = F = \text{const.} \quad (62)$$

Durch Multiplikation von (60) mit \dot{r} und (61) mit $\dot{\varphi}$ und nachfolgender Addition erhält man

$$\dot{r} \ddot{r} + r \dot{r} \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + (m f / r^2) \dot{r} = 0 \quad (63)$$

und durch Integration (Energiesatz):

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - (m f / r) = E = \text{const.} \quad (64)$$

Aus Flächensatz und Energiesatz folgt nach der Sub-

stitution $r = 1/s$ in bekannter Weise als Diff.-Gl. für die Mondbahn:

$$\{ (ds/d\varphi)^2 + s^2 \} [1 + \frac{4}{15} (\kappa \varrho \omega c^2 / F) r_1^5 s] = (2 E / F^2) + (2 m f / F^2) s. \quad (65)$$

Berücksichtigen wir nur in ω lineare Glieder, so erhalten wir hieraus:

$$\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2 E}{F^2} + 2 \left(\frac{m f}{F^2} - \frac{8}{5} m f \frac{r_1^2}{c^2} \frac{\omega}{F^3} E \right) s - \left(1 + \frac{16}{5} m^2 f^2 \frac{r_1^2}{c^2} \frac{\omega}{F^3} \right) s^2. \quad (66)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 + \frac{16}{5} m^2 f^2 (r_1^2 / c^2) (\omega / F^3), \\ k &= \frac{a^2 F^2}{m f - \frac{8}{5} m f (r_1^2 / c^2) (\omega / F) E}, \\ \varepsilon^2 &= 1 + (2 E k^2 / F^2 a^2) \end{aligned} \quad (67)$$

ergibt sich daraus die Bahngleichung

$$s = 1/r = (1/k) \{ 1 + \varepsilon \cos a(\varphi - \varphi_0) \}. \quad (68)$$

(φ_0 = Integrationskonstante). Sie entspricht für $\varepsilon < 1$ ($E < 0$) einer langsam präzedierenden KEPLER-Ellipse, wobei das Perizentrum bei einem Umlauf um den Winkel

$$\delta = \pi(1 - a^2) = -\frac{16}{5} \pi m^2 f^2 (r_1^2 / c^2) (\omega / F^3) \quad (69)$$

vorrückt³³. Approximieren wir schließlich die elliptische Mondbahn durch eine Kreisbahn, so dürfen wir $F^3 = (m^2 f^2) / \omega_M$ setzen und erhalten:

$$\delta = -\frac{16}{5} \pi r_1^2 \omega \omega_M / c^2. \quad (70)$$

Doch ist diese zusätzliche Perizentrumsbewegung im allgemeinen klein gegen diejenige, die gemäß dem EINSTEIN-Effekt zu erwarten ist, und konnte deshalb bisher nicht nachgewiesen werden. Für den günstigsten aller Monde innerhalb unseres Planetensystems, für den innersten Jupitermond, beträgt $\delta = -3' 51''$ im Jahrhundert, während allein auf Grund des EINSTEIN-Effektes sich innerhalb derselben Zeit $37' 35''$ ergeben.

Wenn sich die zu erwartenden Effekte auch noch der Beobachtung entziehen, so haben unsere Untersuchungen doch gezeigt, daß zwischen Gravitationstheorie und Elektrodynamik eine sehr weitgehende Analogie besteht. Insbesondere hat sich in diesem Zusammenhang auch die EINSTEIN-MACHsche Idee bestätigt, daß die Trägheitseffekte (vgl. Abschn. 1) auf Wechselwirkung der Materie zurückgeführt wer-

³³ J. LENSE, Astronom. Nachr. **206**, 117 [1918].

den können. Diese ist der elektromagnetischen Wechselwirkung elektrischer Ladungen sehr ähnlich.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. H. HÖNL, danke ich sehr herzlich für alle Anregungen und Rat-

schläge zu dieser Arbeit und für die Möglichkeit, sie an seinem Institut mit Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft durchzuführen. Für klärende Diskussionen bin ich auch Herrn Dr. K. WESTPFAHL sehr dankbar.

Zur Theorie des Mößbauer-Effektes

Von F. SAUTER und D. WAGNER

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Köln

(Z. Naturforsch. **17 a**, 30—36 [1962]; eingegangen am 30. Oktober 1961)

Es wird gezeigt, daß sich der MÖSSBAUER-Effekt, nämlich das Auftreten einer scharfen, praktisch unverschobenen Linie neben einem breiteren Kontinuum bei der Emission von γ -Strahlung durch einen im Kristallgitter eingebauten Kern, korrespondenzmäßig auch vom Standpunkt der klassischen Physik aus verstehen läßt, sofern man dabei der Quantentheorie in der bei optischen Problemen üblichen Weise durch zwei naheliegende, aus der Quantenmechanik deduzierbare Zusatzvorstellungen Rechnung trägt.

Der Kernpunkt bei dieser halbklassischen Deutung der unverschobenen MÖSSBAUER-Linie besteht in der Vorstellung, daß der während der Emissionszeit τ der γ -Strahlung auf den emittierenden Kern übertragene Rückstoßimpuls während dieser Zeit vermittelt der dabei angeregten Schallwellen sofort in das Kristallgitter dissipiert, so daß die durch den Rückstoß bedingte zusätzliche Geschwindigkeit des Leuchtkerns und damit auch die Dopplerverschiebung der γ -Linie praktisch unmerklich klein bleibt.

Die Deutung des zusätzlichen Kontinuums kann in Analogie zur Deutung des Temperatureinflusses auf RÖNTGEN-Interferenzen am schwingenden Kristallgitter nach v. LAUE u. a. erfolgen.

I. Die Problemstellung

Die Gestalt des Emissions- (und Absorptions-) Spektrums eines γ -Strahlers hängt nach MÖSSBAUER¹ wesentlich davon ab, ob sich der γ -Strahler frei im Gasraum bewegen kann oder ob er in ein Kristallgitter eingebaut ist. Bei der Emission durch ein freies Atom mit der Masse m und der Anregungsenergie $\hbar\omega_0$ wird eine scharfe γ -Linie ausgestrahlt, deren Frequenz ω nach der Beziehung

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 - R \quad \text{mit} \quad R = (\hbar\omega_0)^2 / (2mc^2) \quad (1)$$

verschoben ist; denn das strahlende Atom muß bei der Emission den Rückstoßimpuls $\hbar\omega_0/c$ übernehmen und daher dem γ -Quant die angegebene Energie R entziehen. Ist das emittierende Atom jedoch Bestandteil eines Kristallgitters, so ist nach MÖSSBAUER eine scharfe γ -Linie bei $\omega = \omega_0$ zu beobachten („MÖSSBAUER-Linie“), an die sich, im besonderen gegen kleinere Frequenzen hin, nach Aussage der Theorie ein (bisher noch nicht beobachtetes) Kontinuum anschließt.

Die bereits von MÖSSBAUER gegebene Deutung dieses γ -Spektrums im Rahmen der Quantenmechanik

liegt auf der Hand. Infolge der Wechselwirkung zwischen dem emittierenden Atom und dem Gitter kann sich durch den Emissionsprozeß der Schwingungszustand des Kristalls ändern, indem Phononen erzeugt (oder bei höheren Temperaturen auch absorbiert) werden, so daß die emittierte Frequenz ω durch die Beziehung

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 - \sum_{q,j} \Delta n_{q,j} \hbar\omega_{q,j} \quad (2)$$

gegeben ist; dabei bedeutet $\omega_{q,j}$ die Frequenz der Gitterwelle mit dem Ausbreitungsvektor q und dem Polarisationszustand j (mit $j = 1, 2, 3$), und $\Delta n_{q,j}$ gibt die Änderung der entsprechenden Phononenzahl während der γ -Emission. Die scharfe MÖSSBAUER-Linie entsteht für den Fall, daß der Quantenzustand des schwingenden Gitters beim Prozeß nicht geändert wird ($\Delta n_{q,j} = 0$). Bei der quantenmechanischen Behandlung des MÖSSBAUER-Effektes^{1, 2} hat man somit die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines γ -Quants entsprechend (2) für jeden Satz der $\Delta n_{q,j}$ zu berechnen und daraus die Intensitätsverteilung $I(\omega)$ der γ -Linie zu ermitteln. Man kommt so zu einer Intensitätsformel in Gestalt eines recht ver-

¹ R. L. MÖSSBAUER, Z. Phys. **151**, 124 [1958]; Z. Naturforsch. **14 a**, 211 [1959].

² Vgl. hierzu auch die ausführliche Untersuchung von J. PETZOLD, Sitzungsber. der Heidelberger Akad. 1960/61, 5. Abh.; Z. Phys. **163**, 71 [1961].